

# Die Lichtstreuung an kugel- und stäbchenförmigen Teilchen von Wellenlängengröße

Von RUDOLF BURBERG

Aus dem Max-Planck-Institut für Virusforschung, Tübingen  
(Z. Naturforsch. 11 a, 807—819 [1956] ; eingegangen am 10. Juli 1956)

In vorliegender Arbeit sollen Auswerteverfahren für Streulichtmessungen entwickelt werden, die den besonderen Gegebenheiten der Lichtstreuung an Suspensionen von großen Viren und ähnlichem biologischem Material angepaßt sind. Dabei ergeben sich Gesichtspunkte und Ansätze, die über den begrenzten Aufgabenkreis hinaus für Lichtstreuungs-messungen im allgemeinen von Bedeutung sein dürften.

Die besonderen Gegebenheiten sind folgende:

1. Die streuenden Teilchen haben eine Größe von etwa Lichtwellenlänge.
2. Die Teilchen sind nicht absorbierend.
3. In der Suspension können alle Teilchen hinsichtlich Größe, Form und innerer Struktur als gleich angesehen werden (identische Teilchen).
4. Die Teilchen sind vorwiegend Kugeln oder Stäbchen.
5. Die Teilchen bestehen aus Eiweiß oder Nucleinsäure und müssen meist in wäßriger Lösung untersucht werden. Für kompakte Teilchen ist der Brechungsindex gegen Wasser für Eiweiß 1,20, für Nucleinsäure 1,33.
6. Die Teilchen sind quellbar, weshalb ihre Dichte und ihr Brechungsindex nicht zu den bekannten Größen gehören.
7. Die Größe der Teilchen und der verhältnismäßig große Brechungsindex ergeben ein so starkes Streuvermögen für die Teilchen, daß man bei der Messung mit geringen Konzentrationen auskommt. Die anwendbare Konzentration wird im übrigen dadurch nach oben hin begrenzt, daß bei zu stark streuenden Lösungen die Sekundärstreuung (die Streuung des einmal gestreuten Lichts an weiteren Teilchen) die Intensitätswerte der Primärstreuung, für die ausschließlich die Formeln gelten, merklich verändert.

8. Erfahrungsgemäß ist die Streustrahlung  $J_N$  aller  $N$  Teilchen in der Lösung gleich der algebraischen Summe der Streustrahlung  $J$  eines Einzelteilchens ( $J_N = N \cdot J$ ). Das bedeutet, die Teilchen besitzen bei den benützten Konzentrationen in der Lösung einen so großen Abstand voneinander, daß die Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen keine merkliche Abweichung von der rein statistischen Verteilung der Teilchen bewirken und so intermolekulare Interferenzen nicht feststellbar sind.

Diese Erfahrung steht im Gegensatz zu der, die bei Messungen an sehr viel kleineren Teilchen gewonnen wurde. Der Grund hierfür ist ein zweifacher: Würde man bei den Streulichtmessungen an den sehr kleinen Teilchen dieselbe Gewichtskonzentration wie bei den größeren Teilchen anwenden, wäre der mittlere Abstand der Teilchen voneinander wegen der feineren Unterteilung der Materie geringer. Hinzu kommt aber noch, daß bei einem bestimmten Gesamtgewicht an Teilchenmaterial die Streu-Intensität  $J_N$  proportional dem Volumen eines Teilchens ist [siehe Gl. (8)], so daß man bei den kleineren Teilchen eine höhere Teilchenkonzentration wählen muß, um den gleichen Streulichte-fekt zu erzielen, wie bei den größeren Teilchen. Hierdurch wird der mittlere Abstand zwischen den Teilchen nochmals verringert, so daß es zu größeren Wechselwirkungen zwischen den Teilchen kommt, die zu intermolekularen Interferenzen führen. Damit wird für die sehr kleinen Teilchen das Streulicht von  $N$  Teilchen kleiner als das  $N$ -fache des Streulichts von einem Teilchen ( $J_N < N \cdot J$ ). Die unter 3, 4 und 8 genannten Bedingungen machen die Teilchen für Lichtstreuungs-messungen besonders geeignet.

Wenn bisher Lichtstreuungs-messungen an größeren Teilchen durchgeführt wurden, benutzte man zur Identifizierung der Teilchengröße und -gestalt die DEBYE-Formel [s. Gl. (3) und (4)], ohne sich aber bei größeren Brechungsindizes über Art und Größe des dabei begangenen Fehlers Rechenschaft abzulegen. Dieses veranlaßte Verf. für die zwei wichtigsten Körperformen, Kugeln und Stäbchen, Korrekturglieder zur DEBYE-Formel zu berechnen, die eine genauere Identifizierung der Teilchen erlauben. — Damit ist zugleich für andere Körperformen eine Abschätzung für den zu erwartenden Fehler bei Anwendung der DEBYE-Formel ermöglicht.

Für das einfallende Licht soll die Vereinbarung getroffen werden, daß die Primärwelle linear polarisiert ist, und zwar so, daß die Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors senkrecht auf der Visionsebene steht, — die durch Einfallsrichtung des Primärstrahls und Beobachtungsrichtung gebildete Ebene. Dadurch werden die Formeln und damit die Auswertung von Meßwerten besonders einfach.

## Die Rayleigh- und Debye-Formel für beliebige Körper

Bevor wir an die Streulicht-Formeln für die oben beschriebenen Teilchen herangehen, soll kurz die Streulicht-Formel nach RAYLEIGH und DEBYE behandelt werden.

Hierzu sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

Die einfallende Welle sei eine monochromatische, linear polarisierte, ebene Welle der Vakuumlänge  $\lambda$ , der Ausbreitungsrichtung  $v_0$ , der Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors  $\mathcal{E}_0$ , der des magnetischen Vektors



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.



$\mathfrak{S}_0$  und der mittleren Strahlungsintensität 1. Das die streuenden Teilchen umgebende Lösungsmittel habe den Brechungsindex  $n_0$ , so daß die Wellenlänge des einfallenden Lichts im Lösungsmittel  $\lambda' = \lambda/n_0$  beträgt. Die Teilchen seien dielektrische, isotrope Teilchen mit dem auf das Lösungsmittel bezogenen Brechungsindex  $n$ , der optischen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon = n^2$  und dem Volumen  $V$ . Ferner sollen die Abkürzungen gelten:  $\Delta\varepsilon = \varepsilon - 1 = n^2 - 1$  und  $\Delta n = n - 1$ .

Der Einheitsvektor der Beobachtungsrichtung (Streu-richtung) sei  $v_1$ , die Entfernung zum Beobachtungsort betrage  $r$  und sei sehr groß gegenüber den Teilchenabmessungen und  $\lambda'$ . Die Vektoren  $v_0$  und  $v_1$  schließen den Winkel  $\vartheta$  ein, den Streuwinkel (siehe Abb. 1). Die Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors der einfallenden Welle  $\mathfrak{E}_0$  stehe senkrecht auf der von  $v_0$  und  $v_1$  gebildeten Ebene, der Visionsebene. Die am Beobachtungsort herrschende Intensität der Streustrahlung — bezogen auf die Intensität des einfallenden Lichtes 1 und auf ein Teilchen — sei  $J$ .

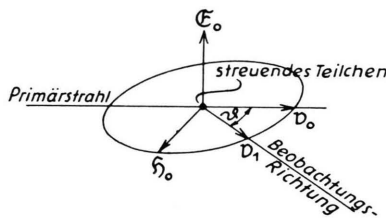


Abb. 1. Zur Orientierung beim Streuvorgang.

Wenn die Teilchen gegenüber der Lichtwellenlänge sehr klein sind, sind sie in jedem Augenblick praktisch genommen von einem homogenen Feld umgeben. Sie werden deshalb ebenso polarisiert wie in einem elektrostatischen Feld. Da diese Polarisation zeitlich wechselt, wirken sie als Hertzscher Dipol. Die Intensität, die ein Hertzscher Dipol im Fernfeld ausstrahlt, führt uns mit den oben eingeführten Bezeichnungen zum RAYLEIGHschen Streugesetz<sup>1</sup> für kleine Teilchen.

$$J = \left( \frac{\pi V \Delta\varepsilon}{\lambda'^2 r} \alpha \right)^2. \quad (1)$$

Die in (1) vorkommende Polarisierbarkeit  $\alpha$  ist ein von der Körperform bestimmter Faktor, der das Verhältnis von Außenfeld zu Innenfeld nach den Gesetzen des homogenen elektrostatischen Feldes angibt. Für die Kugel ist

$$\alpha = 1/(1 + \Delta\varepsilon/3), \quad (2)$$

für ein Stäbchen siehe die spätere Gl. (38). Für sehr kleines  $\Delta\varepsilon$  ist für alle Körperformen  $\alpha = 1$ .

Wenn die Teilchen nicht mehr klein gegenüber

der Wellenlänge sind, ist für das Streulicht zu berücksichtigen, daß innerhalb des Teilchens Interferenzen auftreten. Ist der Unterschied der Brechungsindizes zwischen Teilchen und umgebendem Medium sehr gering, ist die elektrische Feldstärke im Innern des Teilchens in erster Näherung gleich der Außenfeldstärke. Dann führt die Mittelung über alle Lagen des Teilchens im Raum zu der DEBYE-Formel<sup>2</sup>:

$$J = J_0 R(\vartheta) \quad (3)$$

mit 
$$J_0 = \left( \frac{\pi V \Delta\varepsilon}{\lambda'^2 r} \right)^2 \quad (4a)$$

und 
$$R(\vartheta) = \sum_i \sum_j \frac{\sin(4\pi x_{ij} \sin(\vartheta/2))}{4\pi x_{ij} \sin(\vartheta/2)}, \quad (4b)$$

wo  $i$  und  $j$  zwei Volumelemente des Teilchens,  $r_{ij}$  deren Abstand voneinander und  $x_{ij} = r_{ij}/\lambda'$  ist; die beiden Summierungen sind über alle Volumelemente des Teilchens zu erstrecken.

Für  $\vartheta = 0$  ist  $R = 1$ . Deshalb wird  $J_0$  als *Vorwärtsstreuung* bezeichnet.  $R(\vartheta)$  drückt die Abhängigkeit der Streuintensität vom Streuwinkel aus und wird deshalb *Streuwinkel-funktion* genannt.

Ist das Teilchen sehr klein gegenüber der Wellenlänge, ist ebenfalls  $R = 1$ , und zwar für alle Winkel  $\vartheta$ . Dann ist (4a) nichts anderes als die RAYLEIGH-Formel (1) für den Fall  $\varepsilon \approx 1$ , wo, wie erwähnt,  $\alpha = 1$  ist.

Nach (4b) hängt der Verlauf der Streuwinkel-funktion  $R$  mit dem Winkel  $\vartheta$  von der Geometrie des Teilchens, also von seiner Gestalt und Größe ab. Will man durch Streulichtmessungen nur diese beiden Bestimmungsstücke erhalten, genügt die Messung der Streuintensitäten nach verschiedenen Winkeln  $\vartheta$  und ein Vergleich der Kurvenform der gemessenen Werte mit aus der Doppelsumme errechneten Kurven  $R(\vartheta)$  für in Frage kommende Körper. Der Absolutwert der Streuintensität ist dabei belanglos.

Beispiele für Streuwinkel-funktionen sind in Abb. 2 wiedergegeben. Trägt man  $R(\vartheta)$  gegen  $\vartheta$  auf, so erhält man an der Stelle  $\vartheta = 0$  ein Maximum mit waagrechtcr Tangente und um so steiler abfallenden Flanken, je größer das streuende Teilchen ist. Trägt man  $R(\vartheta)$  statt gegen  $\vartheta$  gegen  $\sin^2(\vartheta/2)$  auf, wie in Abb. 2 geschehen, wird an der Stelle  $\vartheta = 0$  die Steigung der Tangente  $t$  von Null verschieden und steht,

<sup>1</sup> LORD RAYLEIGH, Phil. Mag. 41, 447 [1871].

<sup>2</sup> P. DEBYE, J. Phys. u. Colloid. Chem. 51, 18 [1947].



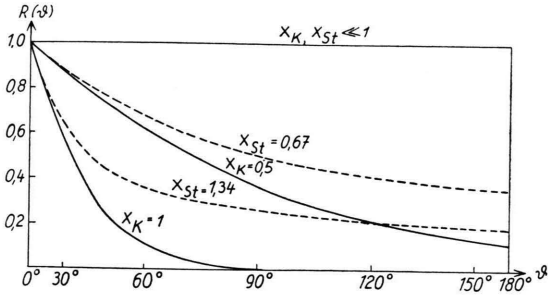


Abb. 2. Beispiele von Streuwinkelfunktionen  $R(\vartheta)$  nach der DEBYE-Theorie für Kugeln (ausgezogen;  $x_K = D/\lambda'$ ) und Stäbchen (gestrichelt;  $x_{St} = L/\lambda'$ ). Abszissenmaßstab  $\sin^2(\vartheta/2)$ .

wie DEBYE<sup>2</sup> zeigte, in einer verhältnismäßig einfachen Beziehung zu den Abmessungen des Teilchens. Entwickelt man (4 b) nach Potenzen von  $\sin^2(\vartheta/2)$ , dann ist:

$$R(\vartheta) = 1 - \frac{16\pi^2}{3} \frac{\int_V x_{ij}^2 dV}{V} \sin^2(\vartheta/2) \pm \dots \quad (5a)$$

Damit ist für die Steigung der Tangente im Punkte  $\vartheta = 0$

$$t = - \frac{16\pi^2}{3} \frac{\int_V x_{ij}^2 dV}{V}. \quad (5b)$$

In der Mechanik wird der Ausdruck  $\Theta = \int_V x_{ij}^2 dV$  als das polare Trägheitsmoment eines Körpers bezeichnet. Die Steigung der Tangente an der Stelle  $\vartheta = 0$  ist also proportional dem Verhältnis von Trägheitsmoment zum Volumen der Teilchen. Für eine Kugel vom Durchmesser  $D$  ist

$$t = - \frac{4\pi^2}{5} \cdot x_K^2 \quad \text{mit} \quad x_K = D/\lambda'.$$

Für ein dünnes Stäbchen der Länge  $L$  ist

$$t = - \frac{4\pi^2}{9} \cdot x_{St}^2 \quad \text{mit} \quad x_{St} = L/\lambda'.$$

Danach ergibt sich für eine Kugel und ein Stäbchen mit gleicher Anfangssteigung der Streuwinkelfunktion die Beziehung  $x_{St} = 3 x_K / \sqrt{5} = 1,34 x_K$ , d. h. die Länge eines Stäbchens, das die gleiche Anfangssteigung der Streuwinkelfunktion wie eine bestimmte Kugel haben soll, muß das rund  $\frac{4}{3}$ -fache des Kugeldurchmessers betragen.

In Abb. 2 sind zwei Paare von Streuwinkelfunktionen mit gleicher Anfangssteigung für je eine Kugel und ein Stäbchen aufgetragen. Die Kurven der Streuwinkelfunktionen für alle anderen Körperformen

mit dem gleichen Verhältnis  $\Theta/V$  verlaufen zwischen der Kugel- und der Stäbchenkurve.

Da bei einer Messung nicht die Vorwärtsstreuung eines Teilchens  $J_0$  gemessen wird, sondern immer die Vorwärtsstreuung aller  $N$  in der Lösung vorhandenen Teilchen,  $J_{0N}$ , wollen wir in (4 a)  $J_0$  durch  $J_{0N}$  ersetzen. Nach der in der Einleitung gemachten Voraussetzung 8 ist  $J_{0N} = N J_0$ , so daß für (4 a) gilt:

$$J_{0N} = \left( \frac{\pi}{\lambda'^2 r} \right)^2 N (V \Delta \varepsilon)^2. \quad (6)$$

$\Delta \varepsilon$  hängt von der Zahl der Streuzentren je Raumeinheit ab, ist daher bei quellbaren Teilchen proportional der Dichte  $s$ , mit der das eigentliche Teilchenmaterial, die Trockensubstanz, im Streukörper verteilt ist, z. B. bei gequollenen Eiweißteilchen der Dichte des reinen Eiweißstoffes.

$$\text{Setzt man} \quad \Delta \varepsilon = \frac{d\varepsilon}{ds} s, \quad (7a)$$

so ist  $\frac{d\varepsilon}{ds}$  für ein bestimmtes Zweistoffsystem Teilchenmaterial – Lösungsmittel (Eiweiß – Wasser) eine meßbare Konstante. Und dann ist, wenn  $m = V s$  das Teilchengewicht bedeutet, das Produkt

$$V \Delta \varepsilon = \frac{d\varepsilon}{ds} m \quad (7b)$$

eine vom Quellungszustand unabhängige Größe.

Mit (7 b) und  $N m = G$ , der Gesamtmenge der Trockensubstanz des Teilchenmaterials in der Lösung, wird

$$N V \Delta \varepsilon = \frac{d\varepsilon}{ds} G \quad \text{und} \quad (7c)$$

$$J_{0N} = \left( \frac{\pi}{\lambda'^2 r} \frac{d\varepsilon}{ds} \right)^2 N m^2 = \left( \frac{\pi}{\lambda'^2 r} \frac{d\varepsilon}{ds} \right)^2 G m \\ = \left( \frac{\pi}{\lambda'^2 r} \right)^2 \Delta \varepsilon \frac{d\varepsilon}{ds} G V. \quad (8)$$

Nach (8) ist es möglich, aus der Vorwärtsstreuung bei gegebenem Teilchengewicht  $m$  die Anzahl der Teilchen in der Lösung  $N$  zu bestimmen oder bei gegebener Substanzmenge  $G$  das Teilchengewicht  $m$ . Durch die gleichzeitige Bestimmung einerseits der Teilchengestalt und Größe und damit des Teilchenvolumens aus der Streuwinkelfunktion (4 b) und andererseits des Teilchengewichts aus (8) erhält man Aufschluß über den Quellungszustand des Teilchens.

Bei der Molekulargewichtsbestimmung von Teilchen im RAYLEIGH-Bereich ist es gleichgültig, ob man



als Bezugsgröße die Intensität  $J$  irgendeines Streuwinkels oder die gesamte vom Teilchen gestreute Intensität  $S$  wählt. Für größere Teilchen ist nach (8) allein die Vorwärtstreuung  $J_0$  die für die Teilchengewichtsbestimmung geeignete Bezugsgröße, denn die Intensität bei einem anderen Winkel, und damit auch die der Gesamtstreuung, ist von Form und Quellungszustand des Teilchens abhängig. Als ein gewisser Mangel für die Anwendung mag erscheinen, daß  $J_0$ , wegen des in gleicher Richtung verlaufenden Primärstrahles, nicht meßbar ist. Die Extrapolation der Meßwerte auf  $J_0$  ist aber bei den von uns ins Auge gefaßten Größen der Teilchen von etwa Wellenlänge und bei der erwähnten Auftragung nach  $\sin^2(\vartheta/2)$  statt nach  $\vartheta$  nicht schwierig, wenn man beim Bau der Meßanordnung dafür sorgt, daß bei Winkeln  $\vartheta$  bis herunter zu etwa  $15^\circ$  noch gemessen werden kann.

### Die Lichtstreuung an kugelförmigen Teilchen

Der Durchmesser der Kugel sei  $D$ . Für das Verhältnis von Durchmesser zu Wellenlänge setzen wir  $x = D/\lambda'$ . Dann lautet die RAYLEIGH-Formel für kugelförmige Teilchen:

$$J = \left( \frac{\pi V \Delta \varepsilon}{\lambda'^2 r} \frac{1}{1 + \Delta \varepsilon/3} \right)^2 = \left( \frac{\pi^2 \lambda' x^3 \Delta \varepsilon}{6 r} \frac{1}{1 + \Delta \varepsilon/3} \right)^2 \quad (9)$$

mit  $V = \frac{\pi D^3}{6}$  und  $D \ll \lambda'$ .

Für die DEBYE-Formeln (3) und (4) ist (s. Anm.<sup>2</sup>)

$$J_0 = \left( \frac{\pi^2 \lambda' x^3 \Delta \varepsilon}{6 r} \right)^2, \quad (10a)$$

$$R(\vartheta) = \left[ \frac{3(\sin z - z \cos z)}{z^3} \right]^2$$

mit  $z = 2\pi x \sin(\vartheta/2)$  und  $\Delta \varepsilon \ll 1$ . (10b)

Die Lösung der MAXWELL-Gleichungen gibt nach MIE<sup>3</sup>:

$$J = \left( \frac{\lambda'}{2\pi r} \right)^2 \left| \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \pi_m + B_m \omega_m) \right|^2 \quad (11)$$

$$\text{mit } \pi_m = \frac{2 P_m'(\cos \vartheta)}{m(m+1)};$$

$$\begin{aligned} \omega_m &= -\pi_m' \sin^2 \vartheta + \pi_m \cos \vartheta \\ &= m \cos \vartheta \pi_m - (m-1) \pi_{m-1}; \end{aligned}$$

<sup>3</sup> G. MIE, Ann. Phys. 25, 337 [1908]. Gegenüber MIE sind die Hilfsfunktionen anders normiert und sind BESSELSche Funktionen eingeführt. Funktional- und Differentialgleichungen für die BESSELSchen Funktionen und Kugelfunktionen

$P_m(\cos \vartheta)$  = LEGENDRESche Kugelfunktion;

$$A_m = -p \frac{n I_{1m}' I_{3m} - I_{1m} I_{3m}'}{n I_{2m} I_{3m} - I_{2m}' I_{3m}'},$$

$$B_m = -p \frac{I_{1m}' I_{3m} - n I_{1m} I_{3m}'}{I_{2m} I_{3m} - n I_{2m}' I_{3m}'},$$

$$I_{1m} = \sqrt{X} \cdot J_p(X); \quad I_{2m} = \sqrt{X} \cdot H_p^{(2)}(X);$$

$$I_{3m} = \sqrt{n X} J_p(n X); \quad p = m + \frac{1}{2}; \quad n = \sqrt{\varepsilon};$$

$$X = \pi x = \frac{\pi D}{\lambda'};$$

$J_p(X)$  = BESSEL-Funktion,

$H_p^{(2)}(X)$  = HANKEL-Funktion

$$= J_p(X) + i(-1)^m J_{-p}(X), \text{ da } p = m + \frac{1}{2}.$$

Für die numerische Berechnung von  $A_m$  und  $B_m$  benutzt man mit Vorteil die Differentialformel

$$J_p'(X) = \frac{p}{X} J_p(X) - J_{p+1}(X),$$

und die Abkürzungen

$$\alpha = \frac{X J_{p+1}(X)}{J_p(X)}; \quad \beta = -\frac{X J_{-p+1}(X)}{J_{-p}(X)};$$

$$\gamma = \frac{n X J_{p+1}(n X)}{J_p(n X)};$$

$$a_m = \frac{(m+1)(n^2-1) - n^2 \alpha + \gamma}{m(n^2+1) + 1 - n^2 \beta - \gamma} \cdot \frac{J_p(X)}{(-1)^m J_{-p}(X)};$$

$$b_m = \frac{\gamma - \alpha}{2m+1 - \beta - \gamma} \cdot \frac{J_p(X)}{(-1)^m J_{-p}(X)},$$

dann ist

$$A_m = -i p \frac{a_m}{1+i a_m}, \quad B_m = -i p \frac{b_m}{1+i b_m}.$$

Für  $\vartheta = 0$  ist  $\pi_m = \omega_m = 1$ ; deshalb ist

$$J_0 = \left( \frac{\lambda'}{2\pi r} \right)^2 \left| \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m) \right|^2 \quad (12a)$$

$$\text{und } R(\vartheta) = \frac{\left| \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \pi_m + B_m \omega_m) \right|^2}{\left| \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m) \right|^2}. \quad (12b)$$

Das Nebeneinander von 3 Formeln für die Lichtstreuung der Kugel würde unbefriedigend sein, wenn es nicht gelänge zu zeigen, daß die RAYLEIGH- und die

nen siehe E. JAHNKE u. F. EMDE, Funktionentafeln, Teubner, 1948. Tabellen für BESSEL-Funktionen mit halbzahligen Indizes ebenda, ausführlicher im 6. und 9. Bericht des Instituts für praktische Mathematik, TH Darmstadt, 1945.



DEBYE-Formel mit den entsprechenden Sonderfällen der MIE-Formel übereinstimmen.

Um diese Übereinstimmung für die RAYLEIGH-Formel zu zeigen, entwickelt man die  $A_m$  und  $B_m$  in (11) nach Potenzen von  $X$  und vernachlässigt die Glieder mit höheren Potenzen von  $X$  gegen das mit der niedrigsten Potenz von  $X$ .

Die Entwicklung von  $A_1$  beginnt mit

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} X^3 = \frac{\Delta\varepsilon \pi^3 x^3}{3(1+\Delta\varepsilon/3)},$$

alle anderen  $A_m$  und  $B_m$  mit höheren Potenzen von  $X$ , so daß wegen  $\pi_1 = \omega_1 = 1$  wird:

$$J = \left( \frac{\lambda' A_1}{2 \pi r} \right)^2 = \left( \frac{\pi^2 \lambda' x^3}{6 r} \frac{1}{1+\Delta\varepsilon/3} \right)^2 \quad (13)$$

in Übereinstimmung mit (9).

Eine Voraussetzung für die Gültigkeit der DEBYE-Formel ist, daß das Innenfeld in erster Näherung gleich dem Außenfeld ist. Der Nachweis, der hier im einzelnen nicht durchgeführt werden soll, läßt sich für die MIE-Formel, unabhängig von der Kugelgröße, erbringen, wenn man die Formel für das Innenfeld aufstellt und darin  $\varepsilon \rightarrow 1$  gehen läßt.

Den unmittelbaren Übergang von der MIE-Formel zur DEBYE-Formel erhält man, wenn man in (11) die  $A_m$  und  $B_m$  durch

$$\left( \frac{\partial A_m}{\partial n} \right)_{n=1} \Delta n \quad \text{und} \quad \left( \frac{\partial B_m}{\partial n} \right)_{n=1} \Delta n$$

ersetzt. Es ist

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial B_m}{\partial n} \right)_{n=1} &= -i p \frac{\pi}{2} X^2 [J_p^2(X) - J_{p-1}(X) J_{p+1}(X)], \\ \left( \frac{\partial A_m}{\partial n} \right)_{n=1} &= \left( \frac{\partial B_m}{\partial n} \right)_{n=1} \\ &- i p \frac{\pi}{2} J_p(X) [2(m+1) J_p(X) - 2X J_{p+1}(X)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Damit gelangen wir, wenn wir

$$J_{\text{DEBYE}} = \left( \frac{\partial J_{\text{MIE}}}{\partial n} \right)_{n=1} \Delta n$$

und  $\Delta\varepsilon = 2 \Delta n$  setzen, entsprechend (10), (11) und (14) zu der Formel:

$$2 \pi^3 x^3 \frac{\sin z - z \cos z}{z^3} = \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\partial A_m}{\partial n} \right)_{n=1} \pi_m + \left( \frac{\partial B_m}{\partial n} \right)_{n=1} \omega_m \right] \right]. \quad (15)$$

Als ein vorläufiger Beweis für (15) und damit für die DEBYE-Formel kann angesehen werden, daß für die in Tab. 1 angegebenen Werte  $x$  und  $\vartheta$  (15) erfüllt wird. Ein formelmäßiger Beweis für (15) ist Verf. nicht bekannt.

Für die Identifizierung von DEBYE-Kugeln aus den bei verschiedenen Winkeln  $\vartheta$  gemessenen Intensitätswerten sollen zwei graphische Methoden

erwähnt werden. Einmal die gebräuchliche Methode, bei der in ein Kurvenblatt nach Art der Abb. 2 die für verschiedene  $x$  errechneten Kurven  $R(\vartheta)$  und die Meßwerte eingetragen werden. Aus der Lage der Meßkurve zu der Schar der errechneten Kurven wird dann das gesuchte  $x$  bestimmt. Dieser Bestimmung haftet eine gewisse Unsicherheit an, weil nur für eine Folge diskreter  $x$ -Werte Rechenwerte vorliegen.

— Deshalb soll hier eine zweite Methode angegeben werden, bei der eine diskrete Folge von  $\vartheta$ -Werten und eine kontinuierliche Folge von  $x$ -Werten verwendet wird. Man lege sich für alle Messungen auf eine bestimmte Folge von Winkeln  $\vartheta$  fest (z. B. auf die in Abb. 3 angegebenen). Für diese Winkel wird  $R$  bei verschiedenen  $x$  aus (10) errechnet und die Kurven  $R(x, \vartheta = \text{const})$  in logarithmischem Maßstab aufgetragen, wie in Abb. 3, wo  $y = x$  zu setzen ist. Für Kugeln liegen alle  $R$ -Werte auf Parallelen zur  $R$ -Achse; andere Körperformen hingegen werden gekrümmte Kurven ergeben.

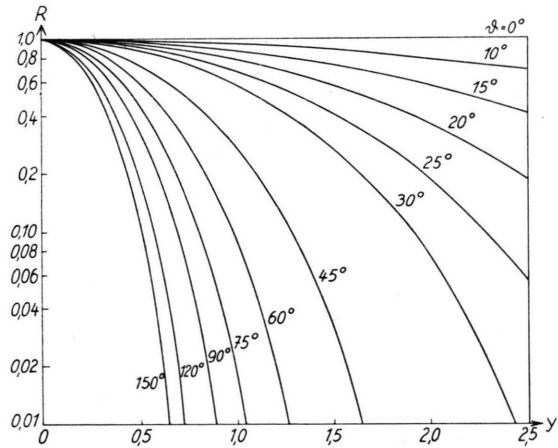


Abb. 3. Streuwinkelfunktionen  $R(x, \vartheta = \text{const})$  für Kugeln nach Gl. (10 b).

Um die gesuchten Bestimmungsstücke  $x$  und  $J_0$  zu finden, trägt man die Meßwerte auf einem besonderen Papierstreifen auf, der dieselbe logarithmische Einteilung wie die  $R$ -Achse des Kurvenblattes Abb. 3 trägt<sup>4</sup>. Dann legt man den Streifen parallel zur  $R$ -Achse auf das Kurvenblatt und verschiebt ihn solange — stets parallel zur  $R$ -Achse gehalten —, bis gleichzeitig jeder Punkt auf dem Papierstreifen, der einem Meßwert zugehört, auf die Kurve gleichen Winkels  $\vartheta$  im Kurvenblatt zu liegen kommt.

<sup>4</sup> Wegen der logarithmischen Einteilung ist es möglich, Intensitätswerte  $J$  und Werte der Streuwinkelfunktion  $R$  direkt miteinander zu vergleichen.



Dann ergibt der Schnittpunkt der Kante des Streifens mit der  $y$ -Achse des Kurvenblattes den gesuchten  $x$ -Wert, die Verlängerung der Geraden  $R=1$  auf den Streifen den auf dem Streifen abzulesenden Wert für  $J_0$ .

Zum Schluß der Betrachtungen über die Kugelstreuung soll nun gezeigt werden, wie man für größere Brechungsindizes, von der MIE-Formel ausgehend, zu einem Auswerteverfahren gelangen kann.

In Tab. 1 findet sich eine Zusammenstellung von

Werten der Streuintensität, die für eine Reihe von Kugeldurchmessern, Brechungsindizes und Streuwinkeln nach der MIE-Formel berechnet worden sind<sup>5</sup>. Um die Werte besser miteinander vergleichen zu können, sind nicht die Absolutwerte  $J$  aufgeführt, sondern für den Winkel  $\vartheta=0$  der Ausdruck

$$q = \frac{J_{0 \text{ MIE}}}{(\lambda'/2 \pi r)^2 (\pi^3 x^3 \Delta\epsilon/3)^2} = \frac{J_{0 \text{ MIE}}}{J_{0 \text{ DEBYE}}} \quad (16)$$

für die übrigen Winkel die Streuwinkelfunktion  $R(\vartheta) = J_{\vartheta}/J_{0 \text{ MIE}}$ .

| $n$  | $X = \pi x$ | $q$                 | $R$                  |            |            |            |            |            |            |             |             |             |
|------|-------------|---------------------|----------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
|      |             | $\vartheta=0^\circ$ | $\vartheta=10^\circ$ | $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $75^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
| 1,0  | 0           | 1                   | 1                    | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1           | 1           | 1           |
|      | 1           | 1                   | 0,994                | 0,986      | 0,948      | 0,889      | 0,816      | 0,743      | 0,662      | 0,533       | 0,452       | 0,425       |
|      | 2           | 1                   | 0,976                | 0,947      | 0,804      | 0,614      | 0,425      | 0,270      | 0,158      | 0,046       | 0,013       | 0,009       |
|      | 3           | 1                   | 0,946                | 0,883      | 0,607      | 0,319      | 0,120      | 0,003      | —          | —           | —           | —           |
|      | 4           | 1                   | 0,907                | 0,801      | 0,400      | 0,108      | 0,009      | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 5           | 1                   | 0,858                | 0,705      | 0,223      | 0,016      | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 6           | 1                   | 0,800                | 0,602      | 0,101      | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
| 1,1  | 0           | 0,873               | 1                    | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1           | 1           | 1           |
|      | 1           | 0,939               | —                    | 0,982      | 0,945      | 0,887      | 0,814      | 0,735      | 0,660      | 0,582       | 0,448       | 0,422       |
|      | 2           | 0,982               | —                    | 0,945      | 0,798      | 0,605      | 0,410      | 0,268      | 0,138      | 0,032       | 0,015       | —           |
|      | 3           | 1,004               | 0,944                | 0,880      | 0,588      | 0,294      | 0,099      | 0,016      | —          | —           | —           | —           |
|      | 4           | 1,003               | 0,901                | 0,788      | 0,368      | 0,084      | 0,024      | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 5           | 0,987               | 0,848                | 0,686      | 0,193      | 0,008      | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 6           | 0,969               | 0,787                | 0,576      | 0,076      | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 8           | 0,909               | 0,647                | —          | —          | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 10          | 0,837               | 0,495                | —          | —          | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
| 1,2  | 0           | 0,760               | 1                    | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1          | 1           | 1           | 1           |
|      | 1           | 0,873               | —                    | 0,989      | 0,949      | 0,890      | 0,818      | 0,740      | 0,661      | 0,527       | 0,442       | 0,414       |
|      | 2           | 0,961               | —                    | 0,942      | 0,789      | 0,587      | 0,387      | 0,226      | 0,116      | 0,020       | —           | —           |
|      | 3           | 0,962               | 0,940                | 0,870      | 0,567      | 0,264      | 0,078      | 0,010      | —          | —           | —           | —           |
|      | 4           | 0,923               | 0,894                | 0,775      | 0,342      | 0,069      | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 5           | 0,857               | 0,836                | 0,661      | 0,164      | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 6           | 0,775               | 0,769                | 0,542      | 0,056      | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 8           | 0,588               | 0,611                | —          | —          | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 10          | 0,402               | 0,436                | —          | —          | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
| 1,33 | 0           | 0,630               | —                    | —          | 1          | —          | 1          | —          | 1          | 1           | 1           | 1           |
|      | 0,6         | 0,674               | —                    | —          | 0,978      | —          | 0,924      | —          | 0,856      | 0,788       | 0,743       | 0,725       |
|      | 1,2         | 0,825               | —                    | —          | 0,920      | —          | 0,728      | —          | 0,521      | 0,364       | 0,276       | 0,249       |
|      | 1,8         | 0,902               | —                    | —          | 0,816      | —          | 0,444      | —          | 0,161      | 0,040       | 0,010       | —           |
|      | 2,4         | 0,887               | —                    | —          | 0,692      | —          | 0,214      | —          | 0,018      | —           | —           | —           |
|      | 3,0         | 0,862               | —                    | —          | 0,532      | —          | 0,050      | —          | 0,011      | —           | —           | —           |
|      | 3,6         | 0,768               | —                    | —          | 0,390      | —          | 0,009      | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 4,2         | 0,681               | —                    | —          | 0,261      | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 4,8         | 0,603               | —                    | —          | 0,144      | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 5,4         | 0,495               | —                    | —          | 0,078      | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |
|      | 6,0         | 0,397               | —                    | —          | 0,034      | —          | —          | —          | —          | —           | —           | —           |

Tab. 1. Nach der MIE-Formel berechnete Werte für verschiedene Brechungsindizes und Kugelradien.

$$q = \frac{J_0}{(\lambda'/2 \pi r \cdot X^3/3)^2} \text{ nach (16); } R = \frac{J_{\vartheta}}{J_0}.$$

Die Werte für  $n=1,0$  sowohl nach der DEBYE- wie nach der MIE-Formel [vgl. Gl. (15)]. Die Werte für  $n=1,1$ ; 1,2 und 1,33 nach Gl. (12 a) bzw. (12 b). — Die Werte für  $n=1,0$ ; 1,1 und 1,2 nach eigenen Berechnungen, die Werte für  $n=1,33$  nach HOLL und DE BARY<sup>6</sup>. — Waagrechte Striche bedeuten, daß die betreffenden Werte gerechnet sind, aber unter 0,005 liegen.

<sup>6</sup> H. HOLL, Optik 4, 173 [1949] u. E. DE BARY, Optik 9, 321 [1952].



Trägt man die MIE-Werte für  $R$  aus Tab. 1 versuchsweise in das für DEBYE-Werte geschaffene Kurvenblatt (Abb. 3) ein, so ergibt sich überraschenderweise, daß sich auch durch diese Werte, wenn man Abweichungen bis 1% zuläßt, senkrechte Geraden legen lassen. Allerdings schneiden sie die  $y$ -Achse an einer weiter rechts liegenden Stelle, als das bei der Berechnung nach der MIE-Formel benützte Argument  $x$  betrug (z. B. ergeben die MIE-Werte für  $x=1,59$  und  $n=1,2$  im DEBYE-Blatt  $y=1,73$ ). Für Lichtstreuungsmessungen an Kugeln sind also die DEBYE-Streuwinkelfunktionen nach (10 b) mit  $z=2\pi y \sin(\vartheta/2)$  auch für beliebige Brechungsindizes anwendbar, nur kann im Allgemeinfall  $y$  nicht mit  $x=D/\lambda'$  gleichgesetzt werden wie bei den DEBYE-Kugeln. Um  $x$  aus  $y$  bestimmen zu können, vergleichen wir die durch Eintragung der Werte aus Tab. 1 in das Kurvenblatt Abb. 3 gewonnenen  $y$  mit den zugrunde gelegten Werten  $x$  und finden, daß in sehr guter Näherung die Hyperbelgleichung

$$x = y - \frac{2\Delta n}{3} (\sqrt{1+y^2} - 1) \quad (17)$$

die  $x$ -Werte innerhalb eines Fehlers von  $\pm 1\%$  für  $n=1,0 \dots 1,33$  und  $x=0 \dots 3,0$  wiedergibt.

Da in (17) der Brechungsindex  $n$  des Teilchens eingeht, kann im allgemeinen  $x$  und damit der Kugeldurchmesser erst aus der Streuwinkelfunktion bestimmt werden, wenn  $n$  bekannt ist. Deshalb wollen wir uns jetzt der Bestimmung von  $n$  zuwenden, das bei quellbaren Stoffen ja nicht als bekannt vorausgesetzt werden darf.

Nehmen wir an, wir hätten an Hand der Werte von Tab. 1 für  $q$  eine Näherungsformel als Funktion von  $y$  und  $n$  aufgestellt, und es seien das Gesamtgewicht  $G$  der Teilchen in der Lösung und  $d\varepsilon/ds$  gegebene Größen, dann ist nach (16) mit  $J_{0\text{MIE}} = J_0$  und  $V = \pi D^3/6$ :

$$\frac{N J_0}{q} = \frac{J_{0N}}{q} = N V \Delta\varepsilon \frac{\pi^3 x^3 \Delta\varepsilon}{6 r^2 \lambda'} \quad (18)$$

Nach (7 c) ist  $N V \Delta\varepsilon = (d\varepsilon/ds) G$ ; dies gibt, in (18) eingesetzt, alle meßbaren Größen auf eine Seite gebracht und mit  $y^3$  links und rechts dividiert:

$$\frac{J_{0N} 6 r^2 \lambda'}{G (d\varepsilon/ds) \pi^3 y^3} = \frac{q x^3 \Delta\varepsilon}{y^3} = Q. \quad (19)$$

In Abb. 4 sind nach der MIE-Formel berechnete Kurven  $Q = q x^3 \Delta\varepsilon / y^3$  bei konstantem  $n$  gegen  $y$

aufgetragen, wobei  $n$  von 1,00 bis 1,20, in Schritten von 0,02, geht ( $n=1,20$  gilt für kompaktes Eiweiß in wässriger Lösung). Bei einer Lichtstreuungsmessung an Kugeln erhält man durch die Intensitätsmessung bei verschiedenen Winkeln  $\vartheta$  mit Hilfe der Kurven von Abb. 3  $y$  und  $J_{0N}$ , damit  $Q$  aus der linken Seite von (19). Dem Wertepaar  $Q$  und  $y$  entspricht ein Punkt in Abb. 4, für den aus der Kurvenschar – gegebenenfalls durch Interpolation – das zugehörige  $n$  bestimmt werden kann. Damit erhalten wir

$$\Delta\varepsilon = n^2 - 1,$$

$x$  nach (17) und damit den Kugeldurchmesser

$$D = x \lambda',$$

das Kugelvolumen

$$V = \frac{\pi D^3}{6} = \frac{\pi (x \lambda')^3}{6},$$

die Dichte der Teilchensubstanz nach (7 a) zu

$$s = \frac{ds}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon,$$

das Teilchengewicht

$$m = V s = \frac{\pi (x \lambda')^3}{6} \frac{ds}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon.$$

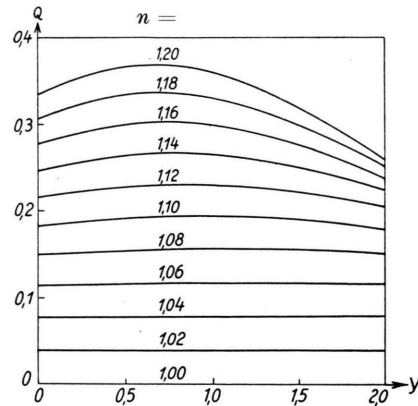


Abb. 4. Die Funktion  $Q(y) = (q x^3 / y^3) \Delta\varepsilon$  nach Gl. (19) für verschiedene  $n$ .

Für die Auftragung der Kurvenschar in Abb. 4 stehen zunächst nur die Werte nach Tab. 1 für  $n=1,0$ ; 1,1 und 1,2 zur Verfügung. Um die Werte für die dazwischen liegenden Kurven zu erhalten, ohne die Werte alle nach der MIE-Formel berechnen zu müssen, kann man auf folgende Weise zu einer Interpolationsformel gelangen:

Man trägt die Werte für  $n=1,0$ ; 1,1 und 1,2 für den Ausdruck  $f = 1/q \cdot y^3/x^3$  gegen  $y$  auf (siehe Abb. 5), wobei die Werte für  $q$  aus Tab. 1 entnommen werden. Man

<sup>5</sup> Für die Möglichkeit, einen Teil der Rechnungen auf der elektronischen Rechenmaschine G 1 des Max-Planck-Instituts für Physik, Göttingen, durchführen zu können, möchte ich an dieser Stelle nochmals danken.



erhält so Punktfolgen, durch die sich zwanglos Parabeln von der Form

$$f = (f_0 - b) + \frac{b}{a^2} (y - a)^2 \quad (21)$$

legen lassen. Für  $y=0$  ist  $f=f_0=1/a^2=(1+\Delta\epsilon/3)^2$  entsprechend Formel (9).

Wie aus Abb. 4 zu ersehen ist, werden mit fallendem  $n$  die Parabeln immer flacher und der Scheitelpunkt rückt nach rechts, um für  $n \rightarrow 1$  in die Gerade  $f=1$  überzugehen. Dem entspricht für  $a$  und  $b$ , die die Koordinaten des Scheitels und die Öffnung der Parabel bestimmen, als einfachster Ansatz

$$a = c_1 + c_2/\Delta n \quad \text{und} \quad b = c_3 \Delta n \quad (22)$$

mit  $c_1=0,414$ ,  $c_2=0,051$ ;  $c_3=0,62$ . Damit werden die Werte von  $f$ , die mit den aus Tab. 1 entnommenen  $q$ -Werten errechnet worden sind, mit einer Genauigkeit von  $\pm 1\%$  erfüllt. Bei Bekanntwerden von MIE-Werten für dazwischen liegende  $n$  wird es sich vielleicht als notwendig erweisen, an den Bestimmungsgleichungen für die Konstanten  $a$  und  $b$  kleine Korrekturen vorzunehmen. Dabei dürften aber bei der Kurvenschar  $Q(y)$  in Abb. 5 keine wesentlichen Änderungen eintreten.

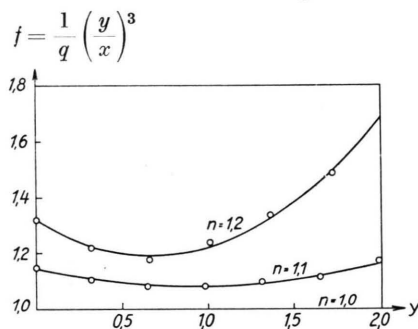


Abb. 5. Die Funktion  $f(y)=1/q \cdot (y/x)^3$  für  $n=1,0; 1,1$  und  $1,2$ .  
Kreise: nach der MIE-Theorie berechnete Werte.  
Ausgezogen: nach Näherungsformel (21).

Ob die Näherungsformel (17) auch noch für einen größeren Bereich  $\Delta n$  und  $x$  als den angegebenen gilt oder sogar Allgemeingültigkeit besitzt, kann erst an Hand eines größeren Zahlenmaterials als dem vorliegenden entschieden werden. Die Näherungsformel (21) gilt jedenfalls nur für den, allerdings in vielen praktischen Fällen sehr wichtigen Wertebereich  $y=0 \dots 2$  und  $n=1 \dots 1,2$  bzw.  $y=0 \dots 3$  und  $n=1,0 \dots 1,1$ ; für darüber hinausgehende Werte  $x$  und  $n$  nicht mehr. Außerdem soll darauf aufmerksam gemacht werden, daß sich die hier durchgeführte Zurückführung der MIE- auf die DEBYE-Formel nach (17) nur für die Werte zwischen  $\vartheta=0$  und der Stelle des ersten Minimums bezieht (Werte des Hauptmaximums). Für größere Winkel  $\vartheta$  besteht bei Kugeln eine praktisch vollständige Auslöschung (vgl. Tab. 1); die in diesem Bereich befindlichen Nebenmaxima der übrig bleibenden Reststreustrahlung sind intensitätsmäßig so schwach, daß sie bei den eingangs erwähnten Versuchsbedingungen unter der

Grenze des Meßbaren liegen. Ihre Größe und Verteilung hängt im übrigen sehr individuell vom Brechungsindex ab, so daß sich eine einfache Beziehung zu den Nebenmaxima der DEBYE-Kurve nicht mehr ableiten läßt.

## Die Lichtstreuung an dünnen, stäbchenförmigen Teilchen

Ein Stäbchen soll hier als „dünn“ gelten, wenn die Abmessungen des Querschnitts klein gegenüber der Wellenlänge sind. Im folgenden sollen uns ausschließlich solche dünne, stäbchenförmige Teilchen beschäftigen.

Für Stäbchen, deren Länge  $L$  klein gegenüber der Wellenlänge  $\lambda'$  ist und deren Querschnittsabmessungen wiederum klein gegenüber der Länge des Stäbchens sind, lautet nach (1) und der späteren Gl. (38) die RAYLEIGH-Formel:

$$J = \left( \frac{\pi V \Delta\epsilon}{\lambda'^2 r} \right)^2 \frac{4 \alpha_{\parallel}^2 + 2 \alpha_{\parallel} \alpha_{\perp} + 9 \alpha_{\perp}^2}{15}, \quad L \ll \lambda'; \quad (23)$$

für die DEBYE-Formel (3) ist

$$R(\vartheta) = 2 \frac{a \operatorname{Si} a + \cos a - 1}{a^2}$$

$$\text{mit} \quad a = 4 \pi x \sin(\vartheta/2); \quad x = L/\lambda', \quad (24a)$$

wo  $\operatorname{Si} a$  den Integralsinus  $\int_0^a \frac{\sin t}{t} dt$  bedeutet.

Für sehr große  $a$  (etwa  $a > 6$ ) geht (24a) über in

$$R(\vartheta) = \frac{\pi}{a} \left( 1 - \frac{2}{\pi a} \right). \quad (24b)$$

In Abb. 6 sind Kurven  $R(x, \vartheta = \text{const})$  aufgetragen, wobei  $y=x$  zu setzen ist, wie bei den Kurven für Kugeln in Abb. 3.

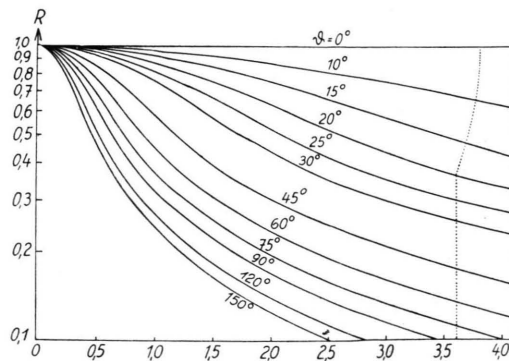


Abb. 6. Streuwinkelfunktionen  $R(x, \vartheta = \text{const})$  für DEBYE-Stäbchen nach Gl. (24a).



Wie schon gezeigt<sup>7</sup>, gelingt es für einen Fall, nämlich den unendlich langen Kreiszylinder beliebigen Durchmessers, die Voraussetzung für die DEBYE-Formel zu bestätigen, daß für  $\varepsilon \rightarrow 1$  das Innenfeld gleich dem Außenfeld wird.

Für beliebig großes  $\Delta\varepsilon$  fehlt im allgemeinen eine Lösung der MAXWELL-Gleichungen, wie wir sie für die Kugel in der MIE-Formel besitzen. Wir wissen nur, daß für sehr kleine Stäbchen (RAYLEIGH-Teilchen) sich die Innenfeldstärken zu den Außenfeldstärken wie in der Elektrostatik verhalten und daß dasselbe auf Grund der Lösung der MAXWELL-Gleichungen für die mittlere Innenfeldstärken des unendlich langen dünnen Zylinders gilt<sup>7</sup>. Wegen der Gültigkeit derselben Beziehung sowohl bei dem sehr kleinen als auch dem unendlich langen Stab ist die Annahme naheliegend, daß diese Beziehung auch für das dünne, aber endlich lange Stäbchen gilt, daß sich auch hier die mittlere Innenfeldstärke zu der Außenfeldstärke wie in der Elektrostatik verhält. Diese Annahme soll der Ausgangspunkt zu einer Theorie der Lichtstreuung an dünnen Stäbchen sein.

Wenn bedeutet:

$\mathfrak{E}_1$  = elektrische Feldstärke der einfallenden Welle,

$\mathfrak{E}_3$  = elektrische Feldstärke der Welle im Innern des Stäbchens,

Index  $a$  = Richtung der Stabachse,

Index  $b$  = eine Richtung senkrecht zur Stabachse (Rotationssymmetrie vorausgesetzt)

und für die Komponenten der Ansatz gemacht wird:

$E_{3a} = \alpha_{\parallel} E_{1a}$  mit der Polarisierbarkeit

$$\alpha_{\parallel} = \frac{1}{1 + M_{\parallel} \Delta\varepsilon}, \quad (25)$$

$E_{3b} = \alpha_{\perp} E_{1b}$  mit  $\alpha_{\perp} = \frac{1}{1 + M_{\perp} \Delta\varepsilon}$ ,

dann ist nach der Elektrostatik für gestreckte Rotationsellipsoide mit der Exzentrizität  $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$  ( $a$  = große,  $b$  = kleine Halbachse) (s. Anm. <sup>8</sup>):

$$M_{\perp} = \frac{1}{2e^2} \left( 1 - \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right), \quad M_{\parallel} = 1 - 2M_{\perp}; \quad (26a)$$

insbesondere für  $a \gg b$ :

$$M_{\perp} = \frac{1}{2}, \quad M_{\parallel} = 0 \text{ und damit } \alpha_{\parallel} = 1,$$

$$\alpha_{\perp} = \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon/2}. \quad (26b)$$

<sup>7</sup> R. BURBERG, Z. Naturforschg. **11a**, 800 [1956].

Um nun zu einer Streuformel für regellos im Raum orientierte Stäbchen zu gelangen, bestimmen wir zunächst für eine beliebige, aber feste Lage des Stäbchens im Raum die mittlere Feldstärke des elektrischen Innenfeldes [s. (27)], daraus das in jedem Volumelement des Stäbchens induzierte Dipolmoment [s. (28)] und daraus den Beitrag, den das Dipolmoment eines solchen Volumelements zur Feldstärke des ausgestrahlten Lichts am Beobachtungsort liefert (31). Durch Summierung der Feldstärkenbeiträge aller Volumelemente des Stäbchens, wobei die Phasenunterschiede zu berücksichtigen sind, erhalten wir die Gesamtfeldstärke des Streulichts am Beobachtungsort (32) bzw. aus dem Quadrat der Feldstärke die Intensität des Streulichts (33). Anschließend wird, unter Beibehaltung der Beobachtungsrichtung, über die Streuintensitäten aller Lagen des Stäbchens im Raum gemittelt [(34) und (36)].

Die Orientierung der einfallenden Welle ist, wie bei Abb. 1, durch die Einheitsvektoren  $\mathfrak{E}_0$ ,  $\mathfrak{H}_0$  und  $\mathbf{v}_0$  gegeben. In das Stäbchen werde ein körperfestes Dreiein von Einheitsvektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  so gelegt, daß  $\mathbf{k}$  in Richtung der Stabachse weist,  $\mathbf{i}$ , das wie  $\mathbf{j}$  senkrecht auf der Stabachse steht, in die von  $\mathfrak{E}_0$  und  $\mathbf{k}$  gebildete Ebene zu liegen kommt (vgl. Abb. 7 a). Längs der Richtung  $\mathbf{k}$  legen

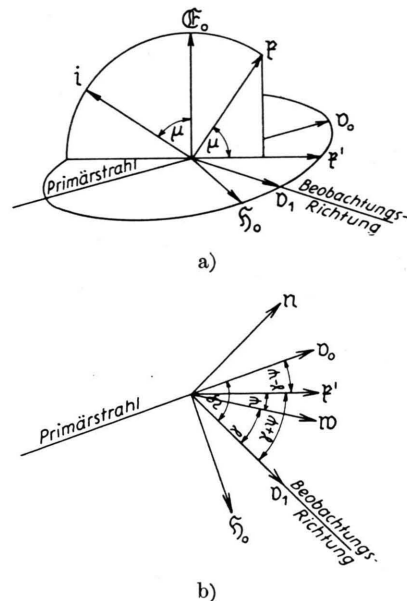


Abb. 7. Orientierung eines Stäbchens beim Streuvorgang. a) in Schrägsicht, b) von oben gesehen. ( $\gamma = \theta/2$ )

wir eine  $z$ -Achse mit dem Nullpunkt in dem einen Stäbende. Die Einheit von  $z$  sei die Wellenlänge  $\lambda'$ . In die

<sup>8</sup> SCHEELS Handbuch der Physik **XV**, 82 [1927].



durch  $v_0$  und  $v_1$  gebildete Visionsebene legen wir noch folgende Einheitsvektoren (siehe Abb. 7 b):

$w$  = Winkelhalbierende des Streuwinkels  $\vartheta$ ,

$f'$  = Schnitt mit der von  $\mathfrak{G}_0$  und  $f$  gebildeten Ebene,

$n$  = Normalenrichtung zu  $v_1$ .

Weiter führen wir für folgende Winkel eine Benennung ein:

$$\angle(v_1, w) = \gamma = \vartheta/2, \quad \angle(w, f') = \psi, \quad \angle(f', f) = \mu.$$

Dann gibt die Zerlegung der Außenfeldstärken nach Komponenten der Richtungen  $i$  und  $f$ :

$$\mathfrak{G}_1 = \hat{E}_1 (\cos \mu i + \sin \mu f);$$

dem entspricht nach (25) ein mittleres Innenfeld

$$\mathfrak{G}_3 = \hat{E}_1 (\alpha_{\perp} \cos \mu i + \alpha_{\parallel} \sin \mu f) \quad (27)$$

und eine Polarisation

$$\mathfrak{P}_3 = \frac{\Delta \varepsilon}{4\pi} \mathfrak{G}_3 = \frac{\Delta \varepsilon \hat{E}_1}{4\pi} (\alpha_{\perp} \cos \mu i + \alpha_{\parallel} \sin \mu f). \quad (28)$$

Da nur die senkrecht auf der Ausstrahlungsrichtung stehenden Dipole bei der Ausstrahlung zur Wirkung kommen, benötigen wir für die Ausstrahlung die  $\mathfrak{G}_0$ - und  $n$ -Komponente von  $\mathfrak{P}_3$ .

Nach Abb. 7 ist

$$\begin{aligned} i &= \cos \mu \mathfrak{G}_0 - \sin \mu \cos(\gamma + \psi) v_1 - \sin \mu \sin(\gamma + \psi) n, \\ f &= \sin \mu \mathfrak{G}_0 + \cos \mu \cos(\gamma + \psi) v_1 + \cos \mu \sin(\gamma + \psi) n \\ &= \sin \mu \mathfrak{G}_0 + \cos \mu \sin(\gamma - \psi) \mathfrak{G}_0 + \cos \mu \cos(\gamma - \psi) v_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Damit lautet die  $\mathfrak{G}_0$ - bzw.  $n$ -Komponente von  $\mathfrak{P}_3$  an der Stelle  $z$  mit  $\alpha_{\perp} = \alpha - \Delta \alpha$  und unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung  $e^{-i 2\pi z(f v_0)}$ , die bei der Erregung durch den Primärstrahl gegenüber dem Stabende  $z=0$  auftritt:

$$\begin{aligned} P_{3\mathfrak{G}_0} &= P_{\perp} = \frac{\Delta \varepsilon}{4\pi} \hat{E}_1 (\alpha_{\parallel} - \Delta \alpha \cos^2 \mu) e^{-i 2\pi z(f v_0)}, \\ P_{3n} &= P_{\parallel} \\ &= \frac{\Delta \varepsilon}{4\pi} \hat{E}_1 \Delta \alpha \sin \mu \cos \mu \sin(\gamma + \psi) e^{-i 2\pi z(f v_0)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Durch die Zeichen  $\perp$  und  $\parallel$  soll die Schwingungsrichtung der beiden Komponenten von  $P$  zur Visionsebene gekennzeichnet werden, während sich bei  $\alpha$  diese Zeichen weiterhin auf die Körperachse beziehen.

Für die Komponenten des elektrischen Vektors des Streulichts am Beobachtungsort gilt entsprechend der Ausstrahlungsbedingung des HERTZschen Dipols

für das Volumelement des Stäbchens  $dV = F dz$  — wo  $F$  die Fläche des Stabquerschnitts bedeutet — an der Stelle  $z$  und unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung  $e^{i 2\pi z(f v_1)}$  für die Ausstrahlung gegenüber dem Stabende  $z=0$ :

$$\begin{aligned} dE_{2\perp} &= \frac{4\pi^2 P_{\perp} dV}{\lambda'^2 r} e^{i 2\pi z(f v_1)}, \\ dE_{2\parallel} &= \frac{4\pi^2 P_{\parallel} dV}{\lambda'^2 r} e^{i 2\pi z(f v_1)}. \end{aligned} \quad (31)$$

(30) in (31) eingesetzt gibt nach (29) mit  $(f v_0 - f v_1) = \cos \mu [\cos(\gamma - \psi) - \cos(\gamma + \psi)] = 2 \sin \gamma \cos \mu \sin \psi$

die Komponenten der Streuwelle für den ganzen Stab:

$$\begin{aligned} E_{2\perp} &= \frac{\pi \Delta \varepsilon F \hat{E}_1}{\lambda'^2 r} (\alpha_{\parallel} - \Delta \alpha \cos^2 \mu) \\ &\quad \cdot \int_0^x e^{-i z 4\pi \sin \gamma \cos \mu \sin \psi} dz \\ &= \frac{i \pi V \Delta \varepsilon \hat{E}_1}{\lambda'^2 r} (\alpha_{\parallel} - \Delta \alpha \cos^2 \mu) \\ &\quad \cdot \frac{1 - e^{-i 4\pi x \sin \gamma \cos \mu \sin \psi}}{4\pi x \sin \gamma \cos \mu \sin \psi} \end{aligned} \quad (32)$$

mit  $x = L/\lambda'$ , und entsprechend

$$\begin{aligned} E_{2\parallel} &= \frac{i \pi V \Delta \varepsilon \hat{E}_1}{\lambda'^2 r} \Delta \alpha \sin \mu \cos \mu \sin(\gamma + \psi) \\ &\quad \cdot \frac{1 - e^{-i 4\pi x \sin \gamma \cos \mu \sin \psi}}{4\pi x \sin \gamma \cos \mu \sin \psi}. \end{aligned}$$

Die Komponenten  $E_{2\perp}$  und  $E_{2\parallel}$  sind gleichphasig, weshalb die Gesamtstrahlungsintensität gleich der Summe der Intensitäten der einzelnen Komponenten ist und wir den Betrag der Strahlungsintensität für jede Komponente für sich berechnen können.

Dann ist mit  $a = 4\pi x \sin \gamma = 4\pi x \sin(\vartheta/2)$  nach (24 a) und  $J_{0D} = J_{0\text{DEBYE}} = (\pi V \Delta \varepsilon / \lambda'^2 r)^2$  nach (4 a):

$$\begin{aligned} j_{\perp} &= \frac{|E_{2\perp}|^2}{\hat{E}_1^2} = J_{0D} (\alpha_{\parallel} - \Delta \alpha \cos^2 \mu)^2 \\ &\quad \cdot \frac{2(1 - \cos(a \cos \mu \sin \psi))}{(a \cos \mu \sin \psi)^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

ebenso

$$\begin{aligned} j_{\parallel} &= J_{0D} (\Delta \alpha)^2 \sin^2 \mu \cos^2 \mu \sin^2(\gamma + \psi) \\ &\quad \cdot \frac{2(1 - \cos(a \cos \mu \sin \psi))}{(a \cos \mu \sin \psi)^2}, \end{aligned}$$

womit die Intensität des Streulichts an einem bestimmten Beobachtungsort und für eine bestimmte Lage des Teilchens im Raum berechnet ist. Wir können jetzt daran gehen, über alle Lagen des Stäb-



chens im Raum zu mitteln. Es ist:

$$J_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \int_{\psi=-\pi}^{\pi} \int_{\mu=-\pi/2}^{\pi/2} j_{\perp} \cos \mu \, d\mu \, d\psi \\ = \frac{J_{0D}}{\pi} \int_{\psi=-\pi}^{\pi} \int_{\mu=0}^{\pi/2} (\alpha_{\parallel}^2 - 2\alpha_{\parallel} \Delta\alpha \cos^2 \mu + \Delta\alpha^2 \cos^4 \mu) \frac{1 - \cos(a \cos \mu \sin \psi)}{(a \cos \mu \sin \psi)^2} \cos \mu \, d\mu \, d\psi; \quad (34)$$

ebenso erhält man

$$J_{\parallel} = \frac{J_{0D} \Delta\alpha^2}{\pi} \int_{\psi=-\pi}^{\pi} \int_{\mu=0}^{\pi/2} (\cos^2 \mu - \cos^4 \mu) \sin^2(\gamma + \psi) \frac{1 - \cos(a \cos \mu \sin \psi)}{(a \cos \mu \sin \psi)^2} \cos \mu \, d\mu \, d\psi.$$

Die Auswertung der Integrale in (34) wird so vorgenommen, daß der Bruch im Integranden nach Potenzen von  $a \cos \mu \sin \psi$  entwickelt, jedes Glied der Reihe mit den übrigen Faktoren des Integranden multipliziert, und die neu entstandene Reihe gliedweise integriert wird. Man erhält so eine Reihendarstellung des Integrals. Diese läßt sich wieder auf die geschlossenen Ausdrücke zurückführen:

$$f = 2 \frac{a \operatorname{Si} a + \cos a - 1}{a^2}; \quad g = \frac{a - \sin a}{a^3}; \\ h = \frac{(a^3/3) + a \cos a - \sin a}{a^5}. \quad (35)$$

Dann ist

$$J_{\perp} = J_{0D} \left[ (\alpha_{\parallel}^2 - \alpha_{\parallel} \Delta\alpha + \frac{3}{8} \Delta\alpha^2) f - (2\alpha_{\parallel} \Delta\alpha - \frac{5}{4} \Delta\alpha^2) g - \frac{3}{2} \Delta\alpha^2 h \right], \quad (36a)$$

$$J_{\parallel} = J_{0D} \frac{\Delta\alpha^2}{8} \left[ \left( \frac{f}{2} - g + 6h \right) + \left( \frac{f}{2} - g - 10h \right) \cos \vartheta \right]. \quad (36b)$$

Obwohl die Stäbchen nach Voraussetzung aus isotropem Material bestehen, erhalten wir, da  $J_{\parallel} \neq 0$  ist, eine Polarisationsrichtung, die von der des einfallenden Lichtes abweicht, eine Depolarisation. Weil sie nur durch die Form des Teilchens bedingt ist, wird sie auch Formdepolarisation genannt. Allerdings ist die Formdepolarisation bei den in Frage kommenden  $\Delta\epsilon$  sehr klein. In diesem Zusammenhang soll die Frage behandelt werden, wie sich eine stoffliche Anisotropie des Teilchenmaterials auf die Stäbchenformel auswirkt: Von den möglichen Anisotropie-Fällen werde hier nur der eine behandelt, daß die Stäbchen einachsige Kristalle sind und die Körperachse zugleich optische Achse ist. Für elektrische Vektoren parallel zur Körperachse gelte die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_{\parallel}$ , für Vektoren senkrecht dazu

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel} (1 + \delta).$$

Dann lautet jetzt die Gl. (28):

$$\mathfrak{B}_3 = \frac{\hat{E}_1}{4\pi} (\Delta\epsilon_{\perp} \alpha_{\perp} \cos \mu \, \mathbf{i} + \Delta\epsilon_{\parallel} \alpha_{\parallel} \sin \mu \, \mathbf{f}) \\ = \frac{\hat{E}_1 \Delta\epsilon_{\parallel}}{4\pi} \left( \frac{\Delta\epsilon_{\perp}}{\Delta\epsilon_{\parallel}} \alpha_{\perp} \cos \mu \, \mathbf{i} + \alpha_{\parallel} \sin \mu \, \mathbf{f} \right).$$

Damit behalten die auf (28) folgenden Gleichungen ihre Gültigkeit, wenn man setzt statt  $\Delta\epsilon \rightarrow \Delta\epsilon_{\parallel}$  und

$$\alpha_{\perp} \rightarrow \frac{\Delta\epsilon_{\perp}}{\Delta\epsilon_{\parallel}} \alpha_{\perp} = \frac{1 + \delta}{1 + \Delta\epsilon_{\perp}/2} \approx \frac{1}{1 + (\Delta\epsilon_{\parallel} - 2\delta)/2} \quad (37)$$

unter Vernachlässigung von  $\delta \Delta\epsilon$  und Gliedern höherer Ordnung von  $\delta$ . Da  $\delta$  nur in ganz wenigen Fällen den Wert 0,01 übersteigt, ersieht man aus (37), daß die Einführung von  $\delta$  in die Streuformeln von so geringem Einfluß ist, daß eine etwaige stoffliche Anisotropie ebenso wie die vorher behandelte Formdepolarisation kaum die Grenze des sicher Meßbaren übersteigt.

Für den DEBYE-Fall ( $\Delta\epsilon \rightarrow 0$ ) ist  $\alpha_{\parallel} = 1$ ;  $\Delta\alpha = 0$ . Damit geht aus den Gln. (36) unmittelbar die DEBYE-Formel (3) und (24) hervor.

Wie die Potenzreihenentwicklung der Ausdrücke in (35) nach  $a$  zeigt, haben diese für  $a \rightarrow 0$  alle einen endlichen Grenzwert:

$$\lim_{a \rightarrow 0} f = 1; \quad \lim_{a \rightarrow 0} g = \frac{1}{6}; \quad \lim_{a \rightarrow 0} h = \frac{1}{30}.$$

Dann ist:

$$J_{0\perp} = J_{0D} \left( \alpha_{\parallel}^2 - \frac{4}{3} \alpha_{\parallel} \Delta\alpha + \frac{8}{15} \Delta\alpha^2 \right), \\ J_{0\parallel} = J_{0D} \frac{\Delta\alpha^2}{15}, \\ J_0 = J_{0\perp} + J_{0\parallel} \quad (38) \\ = J_{0D} \left( \alpha_{\parallel}^2 - \frac{4}{3} \alpha_{\parallel} \Delta\alpha + \frac{3}{5} \Delta\alpha^2 \right) \\ = J_{0D} \frac{4\alpha_{\parallel}^2 + 2\alpha_{\parallel} \alpha_{\perp} + 9\alpha_{\perp}^2}{15}.$$

Diese Gleichungen gelten wegen

$$a = 4\pi (L/\lambda') \sin(\vartheta/2)$$

sowohl für  $\vartheta = 0$  (Vorwärtsstreuung) als auch für  $L \rightarrow 0$  (RAYLEIGH-Fall), wovon wir in (23) schon Gebrauch gemacht haben. (38) stimmt mit den Er-



gebnissen anderer Autoren für den RAYLEIGH-Fall überein<sup>9</sup>.

Eine Übersicht über den Einfluß der Dielektrizitätskonstante auf die Vorwärtsstreuung vermittelt Tab. 2.

| $n$  | $\Delta\varepsilon$ | $\Delta\alpha$ | $q=J_0/J_{0D}$ |
|------|---------------------|----------------|----------------|
| 1,0  | 0                   | 0              | 1,0            |
| 1,1  | 0,21                | 0,095          | 0,878          |
| 1,2  | 0,44                | 0,180          | 0,777          |
| 1,33 | 0,78                | 0,280          | 0,668          |

Tab. 2. Das Verhältnis der Vorwärtsstreuung  $J_0$  von Stäbchen mit verschiedenen Brechungsindizes  $n$  zur Vorwärtsstreuung von DEBYE-Stäbchen gleicher Länge nach (38) mit  $\alpha_{||}=1$  und  $\alpha_{\perp}=1/(1+\Delta\varepsilon/2)$  [s. (26 b)].

Für etwa  $a > 10$  können in (35) die Glieder mit  $1/a^2$  und höheren Potenzen gegen 1 vernachlässigt werden. Dann kann man setzen für

$$f = \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a^2}; \quad g = \frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad h = \frac{1}{3a^2}.$$

Dies gibt in (36) eingesetzt:

$$J_{\perp} = J_{0D} \left[ \frac{\pi}{a} \left( \alpha_{\perp}^2 - \alpha_{||} \Delta\alpha + \frac{3}{8} \Delta\alpha^2 \right) - \frac{2\alpha_{\perp}^2}{a^2} \right],$$

$$J_{||} = J_{0D} \Delta\alpha^2 \left( \frac{\pi}{a} \frac{1 + \cos \vartheta}{16} - \frac{2 \cos \vartheta}{3a^2} \right), \quad a > 10. \quad (39)$$

Um einen Überblick über den Einfluß von  $\Delta\varepsilon$  auf die Streuwinkelfunktion zu gewinnen, kann man wie bei der Kugel für verschiedene  $x$  und Brechungsindizes  $n$  nach (36) und (38) berechnete Werte der Streuwinkelfunktion  $R=J/J_0$  als Kurven  $R(\vartheta, x=\text{const})$  in das Kurvenblatt für DEBYE-Kurven, Abb. 6, eintragen. Als Beispiel sind in Abb. 6 die Werte für  $x=4,0$  und  $n=1,33$  als gestrichelte Linie eingezeichnet. Für die Kurven  $R(\vartheta, x=\text{const})$  ergibt sich dann folgendes:

1. Die Beträge der Differenz  $x-y$  sind proportional  $y$  und  $\Delta\varepsilon$ , so daß die Kurven zu einander ähnlich sind.

2. Die Kurvenpunkte liegen, im Gegensatz zur Kugel, links von dem  $y$ -Wert, der gleich dem Ausgangswert  $x$  ist (im Beispiel links von  $y=4,0$ ).

3. Die Kurven bilden nicht wie bei der Kugel eine senkrechte Gerade. Immerhin kann man die Teilabschnitte der Kurven in den Bereichen

$R=0,9 \dots 1,0$  und  $R < 0,3$  als senkrechte Gerade betrachten. Dann gilt, aus Abb. 6 abgelesen, die Beziehung

$$x = y(1 + 0,134 \Delta\varepsilon) \quad \text{für } R = 0,9 \dots 1,0,$$

$$x = y(1 + 0,142 \Delta\varepsilon) \quad \text{für } R < 0,3. \quad (40)$$

Bei sehr sorgfältiger Messung kann man aus der Abweichung der Kurve  $R(\vartheta, x=\text{const})$ , die durch Eintragen der Meßwerte in das Kurvenblatt für DEBYE-Teilchen entsteht,  $\Delta\varepsilon$  und damit die Dichte des Teilchens bestimmen. Allerdings darf man von der auf diese Weise gewonnenen  $\Delta\varepsilon$ -Bestimmung keine zu hohe Genauigkeit verlangen, da die möglichen Kurven zu nahe beieinander liegen.

Die Bestimmung des Teilchengewichts geschieht nach (38) in gleicher Weise wie bei Gl. (8) besprochen.

Zwischen den Streuwinkelfunktionen von größeren Kugeln und Stäbchen besteht bei der Seitwärtsstreuung ein prinzipieller Unterschied. Man erkennt dies am besten, wenn man verfolgt, wie sich die Aggregation von DEBYE-Teilchen auf die Seit- und Rückwärts-Streuung auswirkt, bei konstantem Gesamtgewicht  $G$  der Teilchen.

Kennzeichnend für die Streuwinkelfunktionen von Kugeln mit  $x > 0,7$  ist, daß nach Erreichen eines ersten Minimums nach größeren Winkeln  $\vartheta$  hin eine praktisch vollständige Auslöschung erfolgt, wie weiter oben beschrieben. Treten nun die Kugeln zu größeren, wieder kugelförmigen Aggregaten zusammen, so steigt entsprechend Gl. (8) die Vorwärtsstreuung  $J_{0N}$  etwa proportional dem Teilchengewicht an, das erste Minimum rückt zu kleineren Winkeln  $\vartheta$  hin, und die bei größeren Winkeln übrig bleibende Reststreustrahlung, die größenordnungsmäßig je Teilchen unabhängig von der Teilchengröße ist, nimmt wegen der Abnahme der Gesamtteilchenzahl  $N$  noch kleinere Werte an, so daß die Auslöschung noch vollkommener wird.

Die seitliche Auslöschung des Streulichts bei größeren Kugeln ermöglicht übrigens, bei einer Mischung von zwei Sorten von Teilchen, z. B. Kugeln und RAYLEIGH-Teilchen, die Daten beider Teilchen für sich zu bestimmen, da ja die Streuung im Bereich großer Winkel  $\vartheta$  nur von den Beimengungen zu den Kugeln herrühren kann.

Für Stäbchen, für die  $x > 0,9$  ist, ist bei dem Streuwinkel  $\vartheta = 135^\circ$  und größeren Winkeln  $a > 10$ . Dann kann man statt der Gl. (36) die Gl. (39) benutzen. Gehen wir wieder zu dem meßbaren Wert

<sup>9</sup> H. A. STUART, Die Physik der Hochpolymeren I, 350. Springer 1952.



der Streuintensität  $J_N$  aller Teilchen über, müssen wir uns die Gln. (38) und (39) mit  $N$  multipliziert denken.

Dann ist entsprechend (8) der in (38) und (39) vorkommende Ausdruck  $N J_{0D} \sim G V = G F L$ , wo  $F$  die Fläche des Stabquerschnitts bedeutet. Der in der eckigen Klammer von  $J_{\perp}$  in (39) stehende Ausdruck ist in erster Linie proportional  $1/a$ , d. h. bei einem festen Beobachtungswinkel  $\vartheta$  proportional  $1/L$ . Dann ist

entsprechend (38) für  $\vartheta = 0$ :  $J_{0N} \sim G F L$ ,

entsprechend (39) für großes  $\vartheta = \text{const}$ :  $J_{\vartheta N} \sim G F$ .

(41)

Im Gegensatz zur Kugel besteht für Stäbchen bei einem großen Winkel  $\vartheta$  keine „praktisch vollständige Auslöschung“. Weiterhin kann man aus (41) entnehmen:

Bei einer Seit-an-Seit-Aggregation von Stäbchen, wo so wenig Teilchen aggregieren sollen, daß das

Aggregat immer noch als dünnes Stäbchen angesprochen werden kann, sind  $L$  und  $G$  konstant, und sämtliche Intensitätswerte nehmen proportional dem Querschnitt  $F$  zu. Bei einer End-an-End-Aggregation sind  $F$  und  $G$  konstant, die Vorwärtsstreuung  $J_{0N}$  wächst proportional der Stäbchenlänge  $L$ , während die Seitwärtsstreuung in erster Näherung konstant bleibt.

Die hier gegebene Theorie der endlich langen, dünnen Stäbchen beruht, wie ausgeführt, auf einem Analogieschluß von dem Verhalten der extrem langen und der extrem kurzen Stäbchen auf das aller Stäbchenlängen. Ob dieser Analogieschluß berechtigt ist, oder ob es eine Größenklasse gibt, in der die Theorie zu keiner befriedigenden Näherung führt, und wie groß dann die Abweichungen von der Theorie sind, das bedarf der experimentellen Nachprüfung an bekanntem und gut definiertem Stäbchenmaterial verschiedener Größe. Entsprechende Messungen sind in Vorbereitung.

Herrn Prof. Dr. H. FRIEDRICH-FREKSA und der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für ihre hilfreiche Unterstützung bei dieser Arbeit.

## Zum Ionennachweis mit dem Szintillations-Detektor in der Massenspektroskopie

Von E. SCHÖNHEIT

Aus dem I. Physikalischen Institut der Freien Universität Berlin  
(Direktor: Prof. Dr. H. LASSEN)

(Z. Naturforsch. 11 a, 819—823 [1956]; eingegangen am 9. August 1956)

Es wird ein Szintillations-Ionendetektor beschrieben, der bei speziellen massenspektroskopischen Untersuchungen zum Nachweis sehr kleiner Ionenintensitäten verwendet wurde. Die in der Arbeit einleitend diskutierten Nachteile des Szintillations-Detektors — Ermüdung des Leuchtstoffes und Massenabhängigkeit der Anzeige — spielen in einem besonderen Fall der Untersuchungen keine Rolle. Für den Leuchtschirm wurde silber-aktiviertes Zinksulfid verwendet. Der benutzte Photomultiplier vom Typ RCA 931 A konnte zur Herabsetzung des Rauschpegels gekühlt werden. Als Beispiel wird ein aus einzelnen Impulsen bestehendes Massenspektrum positiver Ionen, die bei der Photoionisation der Luft entstanden, wiedergegeben. Die Grenze der Nachweisempfindlichkeit betrug bei den bisherigen Untersuchungen für die Masse 18 ( $\text{OH}_2^+$ ) etwa  $10^3$  Ionen pro Impuls, läßt sich auf Grund weiterer Versuche jedoch noch erheblich herabsetzen.

Obwohl der Leuchtschirm zur Beobachtung von Ionenstrahlen zu den ältesten Nachweismitteln gehört und der Szintillationszähler heute zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel der Kernphysik geworden ist, hat die Kombination Leuchtschirm — Photozelle (Photomultiplier) in der Massenspektroskopie bisher praktisch keine Bedeutung gewonnen. Bekannt ist eine Arbeit von RICHARDS und HAYS<sup>1</sup>, in der die Verwendung eines Szintillations-Ionendetektors zum Nachweis sehr kleiner Ionenimpulse in einem Mas-

sesspektrometer beschrieben wird. Die beiden folgenden Gründe geben wohl die Erklärung dafür, daß diese Methode bei massenspektrometrischen Untersuchungen keinen Eingang gefunden hat:

1. Alle gebräuchlichen Leuchtsubstanzen zeigen unter Ionenbeschuß eine mehr oder weniger starke

<sup>1</sup> P. J. RICHARDS u. E. E. HAYS, Rev. Sci. Instrum. 21, 99 [1950].